|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Место занятия в расписании** | **Тема** | **Цели** | **Задачи** | **Контрольные вопросы и задания** | **Д/з** |
| Дата | 04.10.21 | **Геометрический и физический смысл производной.** | Дидактическая | Изучить приложения производной в физике и геометрии через решение проблемной задачи, осмысление необходимых теоретических знаний,через закрепление умений и навыков студентов по практическому применению производной для решения задач физики и геометрии, создать почву для более сложных умственных процессов.  | 1) Закрепить знания, умения и навыки по вычислению производной функции.2)Изучить приложения производной в физике и геометрии.3) Создать почву для более сложных умственных процессов.4) Начать формирование умений и навыков решения задач в рамках данной темы. | 1) Какую задачу решил И.Ньютон?2) Какую задачу решил Г.Лейбниц?3) Назовите формулы, подтверждающие приложение производной в физике и геометрии.4) Назовите уравнение касательной и нормали. | **Изучить и составить конспект, следуя указаниям и требованиям, решить задание** **№1.****Составить уравнение касательной и нормали к графику функции  в точке с абсциссой .** |
| Группа | 1СТМ | Развивающая | Развивать логическое и пространственное мышление. |
| Пара | II | Воспитательная | Воспитывать любознательность и самостоятельность. |
| № занят. | 11 |

Подтвердите своё присутствие на занятии. Составьте конспект в соответствии с требованиями. Фото конспекта отправить на почту **elenabragina7@gmail.com** до 04.11.21 включительно. Работа должна быть выполнена в рамках рабочего времени, отведенного на занятие по математике. **Чтобы все формулы и символы открывались, необходимо файл скачать на рабочий стол.**

**04.10**

**Геометрический и физический смысл производной.**

**1) Мотивация изучения нового материала. Рассказ преподавателя (ознакомиться).**

Источником понятия производной стали, как известно, две задачи, которые рассматривали известный ученый И.Ньютон и немецкий математик Г.Лейбниц (Приложение А):

1) нахождение скорости при произвольном законе движения,

2) нахождение касательной к произвольной линии.

Решение этих задач привело к одной и той же вычислительной задаче, которая легла в основу дифференциального исчисления, благодаря которой определен основной принцип дифференциального исчисления и возникло понятие производной, представляющей собой скорость изменения функции в зависимости от изменения аргумента. Выводы и формулы, полученные во время решения этих вопросов также имеют широкое применение в физике, механике и геометрии.

**2) Сообщение темы, цели, заданий занятия. Рассказ преподавателя (ознакомиться).**

Сегодня в теме «Приложения производной» мы имеем возможность, воспользовавшись наследием И.Ньютона и Г.Лейбница и вашими знаниями о производной, рассмотреть и решить одну из этих двух проблемных задач, расширить наши знания о производной и ее приложении, развить практические умения и навыки решения разнообразных задач с помощью полученных выводов и формул.

**3) Сообщение этапов занятия. Рассказ преподавателя (ознакомиться).**

Для этого нам необходимо определить уровень и глубину теоретических знаний во время устного фронтального опроса, закрепить необходимые практические умения и навыки вычисления производных во время индивидуального опроса у доски, рассмотреть и осмыслить проблемную задачу, которая привела к приложению производной в физике, усвоить геометрическое приложение производной, закрепить полученные знания во время решения задач и моделирования решения задач.

**4) Актуализация опорных знаний обучающихся. Необходимо ответить на вопросы (вопросы и ответы записать в конспект).**

Вопрос 1. Дайте определение производной функции в точке.

Вопрос 2. Как обозначается производная функции?

Вопрос 3. Как называется процесс вычисления производной?

Вопрос 4. Когда функция дифференцируема на интервале?

Вопрос 5. Назовите производные некоторых элементарных функций: y = tg x, y = , y = arcsin x?

Вопрос 6. Какие правила дифференцирования существуют?

Вопрос 7. По какому алгоритму вычисляются производные элементарных функций в точке?

Вопрос 8. Назовите производные функций у =3 $х^{3}$, у = 2$\cos(х)$; у = 5ех ; у = 2 tgx.

Вопрос 9. Какая функция называется сложной?

Вопрос 10. Исправьте ошибки в вычислении производной функции:

у= sin 3х , у= 24х , у= ,

= cos 3x, = 4+24x ln2 , = .

Вопрос 11. Какая функция называется неявной?

Вопрос 12. Какая функция задана параметрически?

Вопрос 13. Закончите решение:

х3+у2=0, 

3х2+2у =0, t= *5*,

2у = -3х2, t=*5,*

= = .

Вопрос 14. Как найти производную второго, третьего, n – го порядка?

Вопрос 15. Найдите вторую производную функции у = 10х, у = 3 sinх.

**5) Актуализация опорных умений и навыков. Осмысление и закрепление необходимых для изучения нового материала практических умений и навыков вычисления производных элементарных функций в точке (записать в конспект).**

**Задача 1. Решить самостоятельно.**

Вычислить производную функции у(х)= -5х7+4х6-2х3+5х2-6х+1 в точке х0= -1.

**6) Изучение нового материала. Примеры и моделирование решения задач (записать в конспект план занятия, физический и геометрический смыслы производной, уравнения касательной и нормали, все решенные и смоделированные задачи).**

В рамках темы "Производная на основании механического и геометрического смыслов" мы детально рассмотрим проблемную задачу, которая привела к физическому смыслу производной, закрепим полученные формулы, решая прямую и обратную физическую задачу, моделируя решение разнообразных физических задач, по аналогии определим геометрический смысл производной и используя уравнения касательной и нормали закрепим геометрический смысл производной.

Итак, рассмотрим новый материал **по плану:**

**1. Физическое приложение производной. Примеры.**

**2. Геометрическое приложение производной. Примеры.**

Для рассмотрения первого вопроса нам необходимо вспомнить некоторые физические величины и определить закон движения. Из физики нам известно, что

 t – время, которое измеряется в с,

S – длина пути, которая измеряется в м,

V – скорость движения, которая измеряется в м/с,

*а* – ускорение движения, которе измеряется в м/с2.

Закон движения – это зависимость пути S от времени t, то есть S=f(t).

Нам необходимо решить задачу, которая формулируется так: найти скорость тела, которое движется по закону S=f(t) в момент времени t.

Будем считать, что расстояние S и время t – физические величины, которые можно измерять.

Пусть за время от t до t+Δt тело прошло путь S+ΔS=f(t+Δt).

Тогда ΔS=f(t+Δt)-f(t)

Средняя скорость тела, которое движется вдоль некоторой линии, определяется по формуле

Vсер = 

Чтобы найти мгновенную скорость такого тела, необходимо перейти к границе отношения  при Δt→0:

V = lim  = lim  = 

Таким образом, мы решили нашу задачу и получили **физический смысл производной: скоростью тела, которое движется по закону S=f(t), называется производная первого порядка от закона движения за время t. Имеем, V(t) = SI(t).**

Продолжая, имеем: ускорением движения тела, которое движется по закону S=f(t), называется производная второго порядка от закона движения за время t.

Имеем, а(t) = SII(t) = VI(t).

Рассмотрим прямую стандартную задачу на применение физического смысла производной.

**Задача 1.** Найти скорость тела и его ускорение в момент времени t = 2с, если тело движется по закону

S (t) = 4t3 - 6t2 + t. Применим полученные формулы:

V(t) = SI(t) = 12t2 – 12t +1,

a(t) = VI(t) = 24t -12,

Если t =2c, имеем:

V(2) = 48 – 24 + 1=25(м/с),

а(2) = 48 – 12 = 36 (м/с2).

Продолжая рассмотрение этого вопроса, будем моделировать разнообразные физические задачи и алгоритмы их решения при помощи физического смысла производной.

Для рассмотренной прямой задачи существует и обратная.

**Задача 2.** Найти момент времени t, когда тело, которое движется по закону S(t), будет иметь скорость (ускорение) V м/с (а м/с2).

Для решения этой задачи необходимо найти закон скорости V (t) (закон ускорения а(t)) и решить уравнение V (t) = V ( а (t) = а).

Перед моделированием других задач проанализируем некоторые условия движения. Если тело останавливается, то V = 0 м/с. Если два тела движутся по законам S1 (t) та S2 (t), то их скорости будут равны при V1(t) = V2(t).

Сформулируем условие другой задачи.

**Задача 3.** Найти момент времени t, когда тело, которое движется по закону S(t), остановится. Для решения этой задачи необходимо найти V (t) и решить уравнение V (t) = 0.

Сформулируем условие четвертой возможной задачи на движение.

**Задача 4.** Найти момент времени, когда скорости тел, которые движутся по законам S1 (t) та S2 (t), будут равны. Для решения этой задачи необходимо найти V1(t) и V2(t) и решить уравнение V1(t) = V2(t).

Таким образом, мы не только рассмотрели задачу, которая привела к физическому смыслу производной, но и, благодаря методам научного познания, смоделировали различные физические задачи и алгоритмы их решения.

Сформулируем геометрический смысл производной по аналогии с физическим смыслом производной и рассмотрим его практическое применение. **Геометрический смысл производной: значение производной функции у=f(x) в точке х0 равно тангенсу угла, образованного касательной к графику функции у=f(x) в точке (х0; f(x0)) и положительным направлением оси ОХ. То есть, имеем**

**f ′(x0) = tg *φ*= k, где k – угловой коэффициент.**

Рассмотрим прямую задачу на применение геометрического смысла производной.

**Задача 1.**

Найти тангенс угла наклона касательной к кривой f(x) = х2 в точке М0(-2; 4).

Используя формулу геометрического смысла производной, имеем:

 fІ(x) = 2x,

 fІ(x0) = fІ(-2) = -4,

 Итак, tg *φ=* -4.

**С помощью геометрического смысла производной и уравнения прямой с угловым коэффициентом были получены уравнения касательной и нормали к графику функции у=f(x) в точке М0(х0;у0):**

**у-у(х0) = уІ(x0) (x-x0) и у-у(х0) = - (x-x0).**

Воспользуемся этими формулами для решения задач на составление уравнений касательной и нормали.

**Задача 2.** Составьте уравнения касательной и нормали к кривой у=х3 в точке М (1;1)

Проанализируем условие задачи. Имеем у=х3, х0=1, у0= у(х0) = 1.

yI(x) = 3х2

yI(x0) = yI(1) = 3.

Составим уравнения касательной и нормали по формулам

у-у(х0) = уІ(x0) (x-x0), у-у(х0) = - (x-x0),

у – 1 = 3 (х-1), у – 1 = -  (х-1),

3х – у -2 =0. 3у + х -4 =0.

**7) Закрепление изученного материала (записать в конспект).**

Только самостоятельное решение задания может показать качество и глубину полученных знаний, умений и навыков. Для этого вам необходимо самостоятельно проанализировать условие задачи, обдумать алгоритм решения и решить ее в течении 5 минут.

**Задача 1. Решить самостоятельно.**

Составьте уравнение касательной к кривой, если соответствующее уравнение нормали имеет вид у-2= -  (х - 1).

**8) Домашнее задание: изучить и составить конспект, следуя указаниям, решить задачу**

**№1.**

**Составить уравнение касательной и нормали к графику функции  в точке с абсциссой .**

Приложение А

**Основные теоретические положения**

***Механическое приложение производной.***

Пусть материальная точка движется равномерно и прямолинейно. Это означает, что за каждую единицу времени она проходит одинаковое расстояние, которое называют скоростью этого движения.

Закон равномерного движения (зависимость расстояния S от времени *t)* выражается линейной функцией

S = v t + S0 , (1)

графиком которой является прямая.

Верным будет и обратное утверждение, а именно: любая линейная функция (1), где v и Sо - постоянные величины, выражает закон прямолинейного равномерного движения. Действительно, найдем расстояние, которое прошла материальная точка за время  *t1* и *tг = t1* + Δ t (Δ t > 0- приращение). Из равенства (1)

Δ S = S2 - S1= *(v tг* + S0) - (v *t1*+ S0) = v(*tг* - *t1*) = vΔt

Откуда

 (2)

Равенство (2) означает, что отношение пройденного пути к промежутку времени, за который материальная точка прошла этот путь, является величиной постоянной.

Кроме того, - средняя скорость vс . Значит, для равномерного движения средняя скорость vс = v является постоянной и не зависит от времени Δt. Она сохраняется в любой момент времени. Поэтому целесообразно среднюю скорость для равномерного движения принимать за мгновенную скорость или за скорость в данный момент времени. Поскольку в любой момент времени мгновенная скорость одинакова, ее называют скоростью равномерного движ

Рассмотрим теперь задачу о нахождении скорости свободно падающего тела. В этом случае зависимость пути от времени определяется формулой

S= 

Зафиксируем произвольный момент времени и вычислим среднюю скорость на отрезке [*t0*; *t0+*Δt]:



Как видим из формулы, средняя скорость изменяется с изменение *Δt* и чим меньше Δt, тем средняя скорость точнее характеризует скорость падающего тела в момент времени t0. Поэтому целесообразно за скорость v в данный момент времени t0 принять границу vс, когдаΔtприближается (стремится) к нулю, то есть



откуда получаем известную формулу скорости



Аналогично определяется скорость произвольного движения, при условии, что точка движется по прямой линии. Пусть имеем закон движения S = *f(t).* Тогда



Отметим, что при фиксированном значении t0 границей средней скорости является число. Для разных значений t0 эти числа разные. Значит, поскольку каждому значению *t0* соответствует единственная определенная граница, то мож­но утверждать, что граница является функциею *t,* то есть



Задача о нахождении скорости движущейся точки в данный момент времени является одной из основных задач, которые привели к возникновению дифференциального исчисления. Для решения поставленной задачи мы выполнили граничный переход в выражении в виде



при стремлении Δt к нулю. Этот граничный переход називается *дифференцированием функции f.*

Дифференцирование или вычисление производной в механике и физике означает нахождение скорости материальной точки по известному закону движения S = f(t)

Значит, производная - это скорость.

Формула (3) связует между собой расстояние и скорость. В конце XVII ст. известный английский ученый И.Ньютон впервые решил задачу о скорости методом граничного перехода. Открытие И.Ньютона стало поворот­ным пунктом в истории естествознания. Выяснилось, что связь между количественными характеристиками разнообразных процессов, которые исследуются в физике, химии, геометрии, технике, экономике аналогичны связи между расстоянием и скоростью.

***Геометрическое приложение производной.***

Основные законы дифференциального исчисления, независимо от И. Ньютона, открыл немецкий математик Г. Лейбниц, решая задачу про­ведения касательной к произвольной кривой.

С понятием касательной к кривой в данной точке мы ознакомились в курсе геометрии при изучении окружности. Касательная к окружности определялась как прямая, которая имеет с окружностью одну общую точку. Однако это определение является отдельным случаем. Его нельзя применить , например, к незамкнутым кривым. Действительно, в случае параболы, уравнение которой у = х, ось абсцисс О*х* и ось ординат О*у* имеют с кривой в точке О по одной общей точке. Значит, каждая из них в соответствии с определением должна быть касательной к кривой в точке О. Но это не так. Если рассмотреть графики функций у = sin х или у = cos х, то прямые у = 1 и у = -1 имеют бесконечное количество общих точек (а не одну!), и они являются касательными к данным кривым.

Значит, приведенные примеры требуют более точного пояснения, что такое касательная. Возникает необходимость дать общее определение касательной, которое подходило бы как для замкнутых так и для незамкнутых кривых. Для этого придется использовать граничный переход, аналогично тому, который был осуществлен при вычислении и скорости.

Пусть имеем некоторую произвольную кривую (рис.1). Возьмем на этой кривой две точки *М0*  и *М1*, и через них проведем прямую *М0М1*, которую назовем секущей*.* Пусть точка *М1* двигаясь вдоль кривой, приближается к точке *М0*. Тогда секущая *М0М1*, вращаясь вокруг точки *М0*, изменит свое положение, которое с приближением *М1* к *М0* стабилизируется. Если длина хорды *М0М1* стремится к нулю и величина угла *М1М0Т* стремится к нулю, то прямую *М0Т* называют граничным положением секущей *М0М1*. Значит, имеем такое определение.

 рис.1

Определение. Касательной к кривой в точке *М0* називается граничное поло­жение секущей *М0М1*, если точка *М1* стремится вдоль кривой до совпадения с точкой *М0.*

Отметим, что с какой бы стороны точка *М1* не приближалась по кривой к точке *М0*, секущая *М0М1* при этом будет приближаться к одному и тому же граничному положению (до одной и той же прямой). Только в этом случае говорят, что в точке *М0* кривая имеет касательную.

А теперь объясним это языком формул.

Пусть кривая является графиком функции *у* = f(х), а точка *М0*, которая принадлежит графику, имеет координаты (*х0; f(х0)).* Касательной будет некоторая прямая, которая проходит через точку *М0.* Для того чтобы построить эту прямую, достаточно найти ее угловой коэффициент. Обозначим угловой коэффициент касательной через *k.*

Сначала найдем угловой коэффициент *k1* секущей *М0М1*. Пусть абсцисса точки *М1* равна х1 = х0 + Δх .  рис. 2

Тогда из рис. 2 имеем:



Для нахождения *k* необходимо устремить *х1* к *х0*, или *Δх* к нулю. Тогда точка *М1*, двигаясь вдоль кривой, приближается к точке *М0*, а секущая *М0М1* – к касательной в точке *М0*. Таким образом, угловой коэффициент касательной можно найти как границу виражения  при условии, что *х1* стремится к *х0*

**

Заметим, что при фиксированном значении *х0* угловым коэффициентом касательной является число. Для разных значений *х0* эти числа разные. Поэтому угловой коэффициент является функцией аргумента х:

 

Как видим, мы пришли к той же задаче, которая рассматривалась при нахождении скорости. Значит, нужно выполнить граничный переход в выражении  при стремлении *Δх* к нулю.

Дифференцирование или вычисление производной в геометрии означает вычисление углового коэффициента касательной к кривой *у = f(х).*

Кроме этого, если Δx→0, то угол *β*, который образует секущая *М0М1* с положительным направлением оси *Ох, стремится к углу* *а*, который образует касательная к кривой в точке *M0* с положительным направлением оси *Ох*. Вследствие неперерывности тангенса:

, проте .

Поэтому соотношение (2) можно переписать еще и так:

